Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I

HOJA DE PROBLEMAS: ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

1. Se consideran, en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar euclídeo, los siguientes subespacios:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x-z=0 \end{array} \right. \quad \text{y } W =< (2,0,-1),(0,-4,1) >$$

   a) Obtener una base ortonormal de cada uno de los subespacios.
   b) Obtener una base de $U^{\perp}$ y otra de $W^{\perp}$.
   c) Calcular la proyección ortogonal del vector $v=(3,2,1)$ sobre U y también sobre W.
   d) Interpreta geométricamente el apartado anterior.

2. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = 2xx' + 4yy' + zz'$$

   a) Hallar mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$U =< (1,-1,2),(0,3,-2) >$$

   b) Calcular mediante el método de Gram-Schmidt una base ortonormal del subespacio

$$W = \{(x,y,z) : x-2y+z, 3x-2y-z=0\}$$

3. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 se considera el siguiente producto escalar

$$p_1(x)\cdot p_2(x) = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx$$

   Calcular una base ortonormal del subespacio de $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$

$$S =< x, 2+5x-4x^2 >$$

4. **Matrices ortogonales**. Una matriz cuyas columnas son vectores ortonormales dos a dos se dice *matriz ortogonal*. Se pide:

   a) Sea A una matriz ortogonal. Comprueba que $A^T \cdot A = I$. Por tanto, en las matrices ortogonales, **traspuesta = inversa**.
   b) Comprueba que la matriz de rotación en el plano

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   es ortogonal (respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$) y encuentra su inversa. Analiza geométricamente el efecto que se produce al multiplicar A sobre el vector $\vec{i}=(1,0)$ y sobre $\vec{j}=(0,1)$.
   c) Comprueba que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   al actuar sobre un vector $\vec{v}=(x,y)$ permuta el orden de las coordenadas x e y. Analiza si se trata de una matriz ortogonal (respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$) y encuentra su inversa.

5. **Fuerza y Trabajo.** Supongamos que una partícula se desplaza desde la posición $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ por acción de una fuerza $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Se define el *trabajo* ejercido por $\vec{F}$ produciendo un desplazamiento $\vec{d} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ como

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Supongamos que $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ y que $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Se pide:

a) Calcula el trabajo W.

b) Calcula la proyección de la fuerza $\vec{F}$ sobre el subespacio generado por $\vec{d}$, es decir, la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento.

c) Calcula la componente normal de la fuerza, es decir, la proyección de $\vec{F}$ sobre el subespacio ortogonal a $\vec{d}$.

6. **Matemáticas II.** Se considera el espacio de funciones

$$L^2\left([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\right) = \left\{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx < \infty \right\}.$$

Se pide:

a) Comprueba que el sistema de vectores

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \cdots, \cos(nx), \sin(nx), \cdots\}. \tag{1}$$

es un sistema ortogonal respecto al producto escalar

$$< f, g >_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx, \qquad f, g \in L^2\left([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\right).$$

Indicación: Usar las fórmulas trigonométricas siguientes:

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) \\ \sin\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \\ \cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

b) Dada una función $f \in L^2\left([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\right)$, a las coordenadas de f en el sistema (1) se les llama *coeficientes de Fourier*, es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

El término de la derecha en la igualdad anterior se llama *serie de Fourier* de f. Hay una diferencia importante en la combinación lineal anterior: la suma tiene *infinitos términos*, pero este asunto será tratado en Matemáticas II. Comprueba que los coeficientes de Fourier a_n y b_n están dados por las fórmulas

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

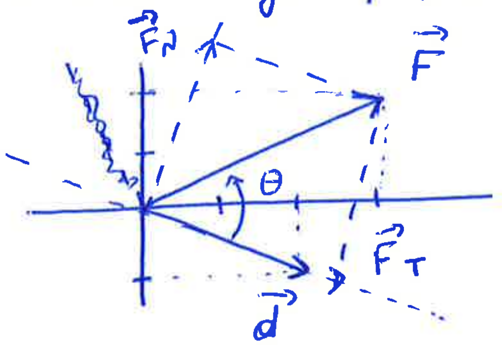
c) Calcula los coeficientes de Fourier en $L^2\left([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\right)$ de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.

HOJA DE PROBLEMAS. ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO

5 Fuerza y Trabajo.

Trabajo $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

$\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j}$



$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N$

a) $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (3,2) \cdot (2,-1) = 6 - 2 = 4$

b) $\underset{4}{\underset{\parallel}{\vec{F} \cdot \vec{d}}} = |\vec{F}|\,|\vec{d}| \cos\theta$

$\cancel{|\vec{F}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \approx}$

$\cancel{|\vec{d}| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \approx}$

$\vec{F}_T = \alpha \vec{d}$

$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N$

$\underset{4}{\underset{\parallel}{\vec{F} \cdot \vec{d}}} = \vec{F}_T \cdot \vec{d} + \overset{0}{\cancel{\vec{F}_N \cdot \vec{d}}} = \alpha\, \vec{d} \cdot \vec{d} = \alpha\, |\vec{d}|^2 = 5$

$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{4}{5}$

$$\boxed{\vec{F}_T = \frac{4}{5}\,(2\vec{i} - \vec{j})}$$

c) ~~Un vector ortogonal a $\vec{d}$ es $\vec{d}^{\perp} = \vec{i} + 2\vec{j}$~~

~~En efecto: $\vec{d} \cdot \vec{d}^{\perp} = (2,-1)\cdot(+1,2) =$~~

c) $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j}$

Vamos a calcular un vector ortogonal a $\vec{d}$, que denotamos por $\vec{d}^{\perp} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}$

$$0 = \vec{d} \cdot \vec{d} = (2,-1)\cdot(\alpha_1, \alpha_2) = 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_2 = 2\alpha_1$$

tomamos $\alpha_1 = 1 \to \alpha_2 = 2$.

Por tanto $\vec{d}^{\perp} = \vec{i} + 2\vec{j}$

Así, $\vec{F} = \vec{F}_T + \beta \vec{d}^{\perp}$

Multiplicamos escalarmente por $\vec{d}^{\perp}$:

$$\underbrace{\vec{F}\cdot\vec{d}^{\perp}}_{\substack{\| \\ \underbrace{(3,2)\cdot(1,2)}_{\substack{\| \\ 3+4}}}} = \overbrace{\cancel{\vec{F}_T\cdot\vec{d}^{\perp}}}^{0} + \underbrace{\beta\, \vec{d}^{\perp}\cdot\vec{d}^{\perp}}_{\substack{\| \\ \underbrace{\beta\,(1,2)\cdot(1,2)}_{\substack{\| \\ \beta(1+4)}}}}$$

$$\Rightarrow \quad 7 = \beta\cdot 5 \to \beta = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_N = \beta \vec{d} = \frac{7}{5}(\vec{i} + 2\vec{j})}$$

otra forma más directa de calcular $\vec{F}_N$.

$$\vec{F}_N = \vec{F} - \vec{F}_T = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \frac{4}{5}(2\vec{i} - \vec{j})$$

$$= \frac{7}{5}\vec{i} + \frac{14}{5}\vec{j}.$$

① $\mathcal{U} \equiv \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ $\quad W = \langle (2,0,-1), (0,-4,1) \rangle$

a) $\mathcal{U} \equiv \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad r(A) = 2 = r(A|b) < 3 =$ nº incógnitas
S.C.I. 1 parámetro.

$z = \alpha \longrightarrow x = \alpha \longrightarrow y = x - z = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{U} = \langle (1,0,1) \rangle$

$\| (1,0,1) \| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

Base ortonormal de $\mathcal{U}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \}$.

Para obtener una base ortonormal de W usamos el método de ortogonalización de Gram-Schmith.

1º) $w_1 = (2,0,-1)$

2º) $w_2 = (0,-4,1) + a_{21} \cdot (2,0,-1)$

$0 = w_1 \cdot w_2 = (2,0,-1) \cdot (0,-4,1) + a_{21} (2,0,-1) \cdot (2,0,-1)$

$$a_{21} = - \frac{(2,0,-1) \cdot (0,-4,1)}{(2,0,-1) \cdot (2,0,-1)} = - \frac{-1}{5} = \frac{1}{5}$$

$w_2 = (0,-4,1) + \frac{1}{5} (2,0,-1) = (\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5})$

$$\|w_1\| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\|w_2\| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+(-4)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \dots$$

Base ortonormal de W:

$$B_W = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \frac{1}{\|w_2\|}\left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5}\right) \right\}$$

b) Base de $\mathcal{U}^\perp$:

$$\mathcal{U}^\perp = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z)\cdot u = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \}.$$

Como $\mathcal{U} = \langle (1,0,1) \rangle$

$(x,y,z)\cdot u = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}$ es equivalente a

$$(x,y,z)\cdot(1,0,1) = 0.$$

En efecto: si $u \in \mathcal{U}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \alpha \cdot (1,0,1).$$

Por tanto, $(x,y,z)\cdot u = (x,y,z)\,\alpha\,(1,0,1) = \alpha\,\underbrace{(x,y,z)\cdot(1,0,1)}$

En resumen, las ecuaciones implícitas de $\mathcal{U}^\perp$ se obtienen de la igualdad

$$(x,y,z)\cdot(1,0,1) = 0 \iff$$

$$\{ x + z = 0 \quad \rightarrow A = (1,0,1) \rightarrow r(A) = 1$$

$$\downarrow$$

2 parámetros.

$z = \alpha \quad \rightarrow x = -\alpha$

$y = \beta$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{U}^{\perp} = \langle (-1,0,1), (0,1,0) \rangle$

Base de $W^{\perp}$:

$W = \langle (2,0,-1), (0,-4,1) \rangle$

$W^{\perp} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \cdot w = 0 \quad \forall w \in W \}$

Al igual que antes, los vectores de $W^{\perp}$ son ~~los~~ todos aquellos que son ortogonales a una base de W. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} (x,y,z)\cdot(2,0,-1) = 0 \\ (x,y,z)\cdot(0,-4,1) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x \quad -z = 0 \\ -4y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow r(A) = 2 \rightarrow 1 \text{ parámetro.}$$

$z = \alpha \longrightarrow x = \frac{\alpha}{2}$

$4y = z \rightarrow y = \frac{\alpha}{4}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \times 4.$$

Base de $W^{\perp}$, $B_{W^{\perp}} = \{ (2,1,4) \}$

c) Proyección ortogonal de $v = (3,2,1)$ sobre $\mathcal{U}$:

$v = u + u^{\perp}$ con $u \in \mathcal{U}$, $u^{\perp} \in \mathcal{U}^{\perp}$.

$u = \mathbb{P}_{v \to \mathcal{U}}$.

Como $\mathcal{U} = \langle (1,0,1) \rangle \Rightarrow u = \alpha (1,0,1)$.

Así,

$(3,2,1) = \alpha (1,0,1) + u^{\perp}$.

Multiplicando escalarmente en esta expresión por $(1,0,1)$:

$$(1,0,1)\cdot(3,2,1) = \alpha\,(1,0,1)\cdot(1,0,1) + \cancelto{0}{(1,0,1)\cdot u^{\perp}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(1,0,1)\cdot(3,2,1)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)} = \frac{3+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 .$$

Por tanto, $\mathbb{P}_{v \to U} = (2,0,2)$

Proyección ortogonal de v sobre W.

$v = w + w^{\perp}$ con $w \in W$ y $w^{\perp} \in W^{\perp}$.

~~Como $W = \langle (2,0,-1), (0,-4,1) \rangle$~~ ,

~~$w = \alpha_1 (2,0,-1) + \alpha_2 (0,-4,1)$~~

~~Por tanto:~~

~~$(3,2,1) = \alpha_1 (2,0,-1) + \alpha_2 (0,-4,1) + w^{\perp}$~~

Como $B_W = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \frac{1}{\|w_2\|}\left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5}\right) \right\}$

es una base ortonormal de W, entonces

$$w = \alpha_1 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \alpha_2 \frac{1}{\|w_2\|}\left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5}\right)\} .$$

Así:

$$(3,2,1) = \alpha_1 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \alpha_2 \{ \frac{1}{\|w_2\|}\left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5}\right) + w^{\perp} .$$

Multiplicando escalarmente por $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot(3,2,1) = \alpha_1 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+ \cancelto{0}{\alpha_2 \frac{1}{\|w_2\|}\left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + \cancelto{0}{w^{\perp}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot(3,2,1)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

Multiplicando por $\frac{1}{\|w_2\|}\left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5}\right)$ se obtiene:

$$\alpha_2 = \frac{1}{\|w_2\|}\left(\frac{2}{5}, -4, \frac{4}{5}\right)\cdot(3,2,1) = \dots$$

d) En el caso de U, proyectamos el vector $(3,2,1)$ sobre la recta generada por $(1,0,1)$ que pasa por el origen.

En el caso de W estamos proyectando de manera ortogonal un vector sobre un plano.

④ Matrices ortogonales

a) A ortogonal $\rightarrow A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

donde $u_i \cdot u_j = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{delta de Kronecker}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

$$A^T = \begin{pmatrix} - & u_1 & - \\ - & u_2 & - \\ & \vdots & \\ - & u_n & - \end{pmatrix}$$

$\cancel{A \cdot A^T =}$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 & \cdots & u_1 \cdot u_n \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_2 & \cdots & u_2 \cdot u_n \\ \vdots & & & \vdots \\ u_n \cdot u_1 & \cdots & & u_n \cdot u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $u_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$u_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$u_1 \cdot u_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

$u_1 \cdot u_2 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = 0$

$u_2 \cdot u_1 = u_1 \cdot u_2 = 0$

$u_2 \cdot u_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

Como A es ortogonal, $A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

c) $v = (x, y)$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

A es ortogonal. Por tanto, $A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6 Matemáticas II. (Series de Fourier)

$$L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R}) = \{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty \}$$

a) $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), \dots\}$ es ortogonal respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

$$\langle 1, \cos(nx) \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$
$n = 1, 2, \dots,$

$$\langle 1, \operatorname{sen}(nx) \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n} [\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)]$$

$= 0$ pues $\cos(x) = \cos(-x)$.

$$< \cos(nx), \cos(mx) >_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, \text{sen}(mx)\, dx$$

$m = 1, 2, \ldots$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\text{sen}[(n+m)x] + \text{sen}[(m-n)x] \right) dx \right.$$

$= 0$, según acabamos de ver.

De forma similar se comprueba que

$$< \cos(nx), \cos(mx) >_{L^2} = 0, \qquad n \neq m$$

$$< \text{sen}(nx), \text{sen}(mx) >_{L^2} = 0, \qquad n \neq m.$$

b) De manera análoga al caso de $\mathbb{R}^n$, el sistema anterior, es una base de $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$, aunque aquí hay unos detalles mucho más complicados que se derivan del hecho de que el sistema anterior tiene un <u>número infinito</u> de vectores.

Por tanto, cada "vector" $f \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ se puede escribir en combinación lineal (INFINITA) de los vectores $\{1, \cos x, \text{sen}\, x, \cos(2x), \text{sen}(2x), \ldots\}$ es decir,

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n\, \text{sen}(nx) \right)}_{\text{Serie de Fourier de } f.}$$

Vamos a calcular a_0, a_n, y b_n.

Multiplicando escalarmente en la igualdad anterior por $\cos(mx)$ ~~en~~ se tiene:

$$\langle f, \cos(mx)\rangle_{L^2} = \frac{a_0}{2}\langle 1, \cos(mx)\rangle_{L^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\langle \cos(nx), \cos(mx)\rangle_{L^2} + b_n\langle \operatorname{sen}(nx), \operatorname{sen}(mx)\rangle_{L^2}\Big]$$

~~porlapst~~ por a)

$$= a_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\,dx}_{\pi}.$$

~~Por ant~~

Por tanto, $a_m = \frac{1}{\pi}\langle f, \cos(mx)\rangle_{L^2}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx.$$

Multiplicando escalarmente por $\operatorname{sen}(mx)$ se obtienen las fórmulas para b_m.

a_m, b_m se llaman coeficientes de Fourier.

c) coeficientes de Fourier de $f(x) = x$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot x\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}\right]$$

$$= 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 0$$

integrando por partes.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)\,dx$$

Calculamos $\int x\,\text{sen}(nx)\,dx$:

$$\int x\,\text{sen}(nx)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = u \longrightarrow dx = du \\ \text{sen}(nx)dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{array} \right|$$

$$= -\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$$

$$= -\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\,\text{sen}(nx).$$

Por tanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)\,dx = \left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\,\text{sen}(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \cancel{\frac{1}{n^2}\,\text{sen}(n\pi)}^{\,0} - \frac{\pi}{n}\cos(-n\pi)$$

$$-\cancel{\frac{1}{n^2}\,\text{sen}(-n\pi)}^{\,0}$$

$$= \Big| -\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) = -(-1)^n\,\frac{2\pi}{n}$$

$\cos(\pi) = -1$

$\cos(2\pi) = 1$

$\cos(3\pi) = -1$

$\cos(4\pi) = 1$

$- - - - -$

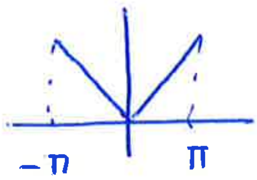
$\cos(n\pi) = (-1)^n$

De esta forma

$$x = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\,\mathrm{sen}(nx)$$

Coeficientes de Fourier de $f(x) = |x|$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cdot 1\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

partes

$$= \frac{2}{\pi}\;\frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = 0.$$

Por tanto,

$$|x| = \cancel{\sum}\ \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,7\ldots} \frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

Ejemplo 8.2.1 Consideremos la función 2π−periódica definida como

$$f(x) = |x| \quad \text{para} \quad -\pi \leq x < \pi$$

y $f(x+2\pi) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Se trata de una función par, y por tanto, $b_n = 0$. Además,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

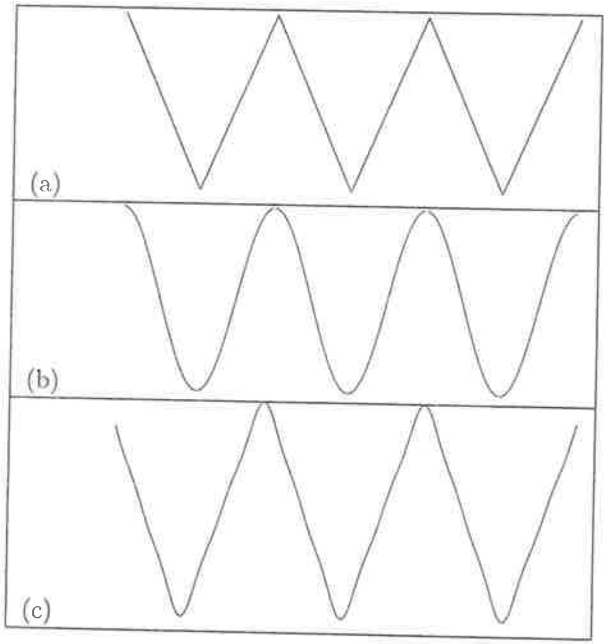
y

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier asociada a f es

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

En la siguiente gráfica aparecen representados, en (a) la extensión 2π−periódica de la función $f(x) = |x|$, en (b) S_1 y en (c) S_3, donde $S_n = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.



Ejemplo 8.2.2 Consideremos ahora la función

$$f(x) = x \quad \text{para} \quad -\pi \leq x < \pi$$

y $f(x+2\pi) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Se trata de una función impar, y por tanto, $a_n = 0$. Además,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) \\ &= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de f es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

En la siguiente gráfica siguiente aparecen representados, en (a) la gráfica de la extensión 2π−periódica de $f(x) = x$, en (b) S_5 y en (c) S_{15}, donde $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx$ es el término n−ésimo de la serie de Fourier asociada a f.